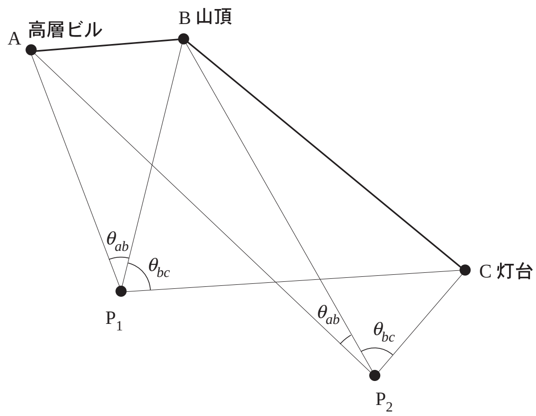
後方交会法 (Backward Intersection)

1　後方交会法による座標計算

後方交会法は，３つ以上の座標が既知の点を用い，自分自身の座標を求める手法である．３つの既知点を用いる場合，自分と既知とを結ぶ測線が３本引け，それぞれの測線のなす角度を用いて計算できる．既知点を出発し，自分に向けて伸びるベクトルの交点が求める位置のため，後方交会法と呼ばれている．古くは，船の位置を知るのに「**山立て**」という手法が用いられたが，これは船から見える山の重なり具合によって自分自身の位置を決定していた．例えば，高層ビル・山の頂上・灯台等を用いても，その見かけの位置関係から自分の座標を決定することが出来る．



上図のように，A と B の見かけの水平角 θ_{ab} と B と C の見かけの水平角 θ_{bc} は，自分の位置 P の座標に応じて変化する．この性質を利用して P の座標が決定できるのである．これを解析的に解くには少々骨が折れるが，順を追って解説する．

1.1　外心の座標計算

下図のように点 A, B, C を既知点とし，$\angle APB$ が θ_{ab} となる部分は，AB を弦とする円周上にある．言い換えれば，AB を弦とする円周上の点においては，常に角度が一定となる．したがって，三角形 ABP の外接円の中心，つまり外心の位置を求めなければならない．三角形 ABP の外心の位置を O とすると，外心の半径 R_o は，正弦定理を用いて，次式より計算できる．

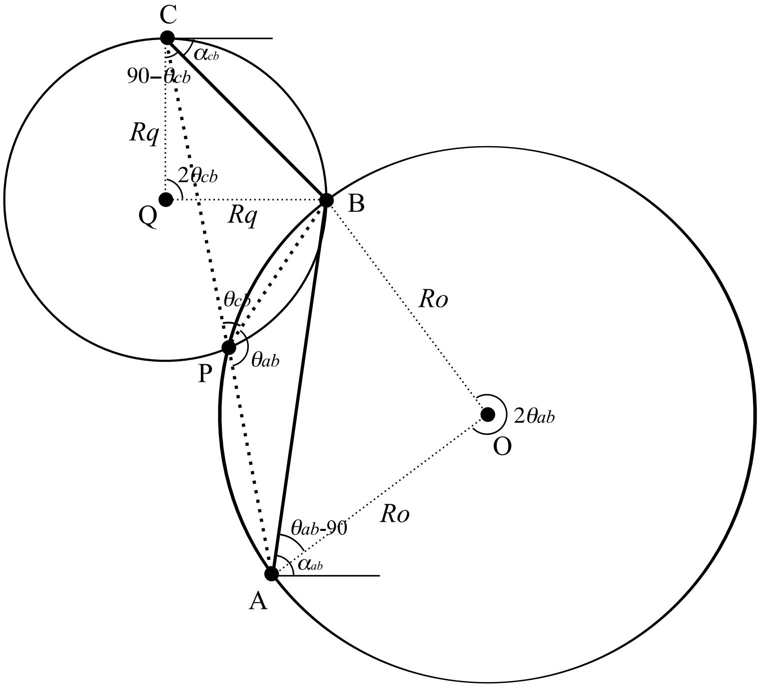
$$R_o = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}}{\sin\theta_{ab}} \tag{1}$$

R_o が計算できれば，線分 AB の傾き α_{ab} と $\angle BAO$ より，外心の座標が計算できる．まず，線分 AB の傾きは正接の逆関数を用いて $\alpha_{ab} = \tan^{-1}\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$ で計算できる．$\angle BAO$ は，△ AOB が二等辺三角形であり，$\angle AOB = 360^\circ - 2\theta_{ab}$ なので，$90^\circ - \theta_{ab}$ となる．したがって，外心 O の座標 (x_o, y_o)

は，次式で計算できる．

$$\begin{cases} x_o = R_o \cos(\alpha_{ab} - (\theta_{ab} - 90^\circ)) + x_a \\ y_o = R_o \sin(\alpha_{ab} - (\theta_{ab} - 90^\circ)) + y_a \end{cases} \tag{2}$$

なお，$\alpha_{ab} - (\theta_{ab} - 90^\circ)$ の符号は，線分 AB が右上がりの傾きの場合は正，右下がりの傾きの場合は負となる．



続いて，△ BCP についても同様に外心 Q の座標 (x_q, y_q) を求める．まず，外接円の半径は，次式で求まる．

$$R_q = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2}}{\sin\theta_{cb}} \tag{3}$$

$\angle CBQ$ は，$90^\circ - \theta_{cb}$ なので，外心 Q の座標 (x_q, y_q) は，次式で求めることが出来る．

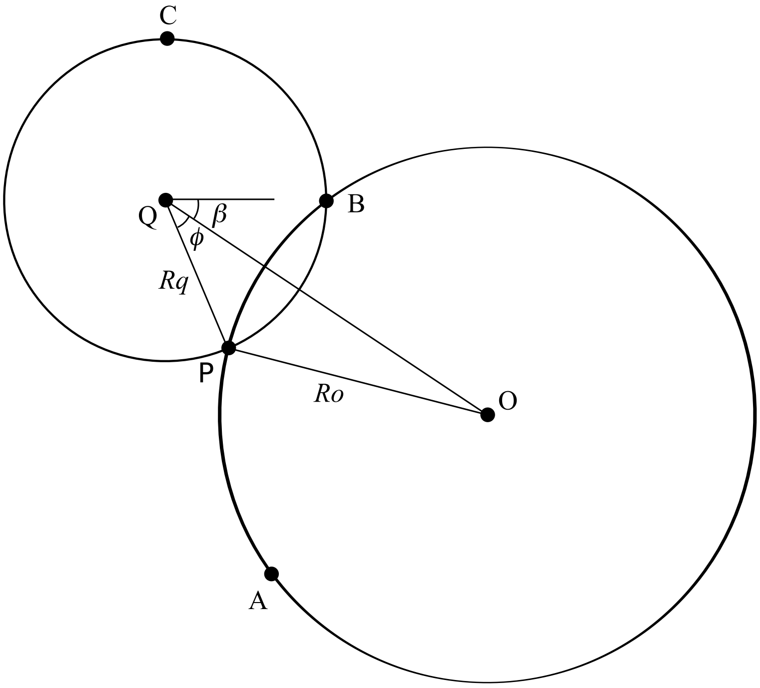
$$\begin{cases} x_q = R_q \cos(\alpha_{cb} + (90^\circ - \theta_{cb})) + x_c \\ y_q = R_q \sin(\alpha_{cb} + (90^\circ \ - \theta_{cb})) + y_c \end{cases} \tag{4}$$

なお，$\alpha_{cb} + (90^\circ \ - \theta_{cb})$ の符号は，線分 CB が右上がりの傾きの場合は正，右下がりの傾きの場合は負となる．

1.2 2つの外心の座標から P を求める

P は，2つの外接円の交点の一つである．2つの外接円の半径と中心座標が計算できたので，2つの外接円の方程式が決定できる．これらを連立方程式として解いたときに得られる2つの交点のうち，一つは点 B であり，もう一つとが求めたい点 P の座標となる．

連立方程式による解法は，コンピュータを用いれば簡単であるが，手計算では少々難しいので，三角形 OQP を用いて計算する方法を示す．OP の長さは外接円 O の半径 R_0 であり，QP の長さは外接円 Q の半径 R_q となる．



OQ の長さは，求まった外心の座標より計算できる．$\phi = \angle QOP, s = \overline{OQ}$ とすると，余弦定理より次式が得られる．

$$\cos\phi = \frac{R_q^2 + s^2 - R_o^2}{2R_q s} \tag{5}$$

次に，線分 OQ の傾き β は，$\beta = \tan^{-1}\frac{y_q - y_o}{x_q - x_o}$ より，求める P の座標は，次式で計算できる．

$$\begin{cases} x_p = R_q\cos(\phi+\beta) + x_o \\ y_p = R_q\sin(\phi+\beta) + y_o \end{cases} \tag{6}$$

なお，$\phi+\beta$ の符号は，線分 OQ が右上がりの傾きの場合は正，右下がりの傾きの場合は負となる．